TEKNOLOJİ, Yıl 5, (2002), Sayı 3-4, 121-129

TEKNOLOJİ

İŞE-BAĞIMLI ÖĞRENME ETKİLİ ÇİZELGELEME PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR MATEMATİKSEL MODEL

Tamer EREN*   Ertan GÜNER**

* Kırıkkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, End. Mühendisliği Bölümü, 71450 Kırıkkale
**Gazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, End. Mühendisliği Bölümü, 06570 Maltepe, Ankara

ÖZET

Üretim ortamlarında aynı işlemlerin devamlı olarak yapılması sonucunda işlem süreci gelişme gösterir. Gelişme gösteren bir iş, çizelgelemede ne kadar arkaya atılırsa, üretim zamanı o kadar kısalır. Bu olgu literatürde öğrenme etkisi olarak bilinir. Öğrenme etkisi, yöneylem araştırmasının çok farklı alanlarında uygulanmıştır. Çizelgeleme problemlerinde ise son zamanlarda yapılan çalışmalar dikkat çekmektedir. Bu çalışmada serbest bırakma ve işlem zamanlarının işe-bağımlı öğrenme etkili olması durumunda toplam akış zamanını enküçüklemek için bir matematiksel model önerilmektedir. Model, örnek problem setinde çözülmüş ve sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Çizelgeleme, toplam akış zamanı, matematiksel programlama, öğrenme etkisi

A MATHEMATICAL MODEL FOR SOLUTION OF JOB-DEPENDENT LEARNING EFFECT SCHEDULING PROBLEM

ABSTRACT

Process time is improved due to the routine repeated operations in the manufacturing environment. As a result the processing time of a given product is shorter if it is scheduled later in the production sequence. This phenomenon is known as learning effect in the literature. Learning effect is applied to various areas in operations research. Recent studies in scheduling problems take attention. It is proposed a mathematical model in this study that is to minimize total flow time in the cases release dates and processing times with the job-dependent learning effect. The model is solved in sample problem set and the results are evaluated.

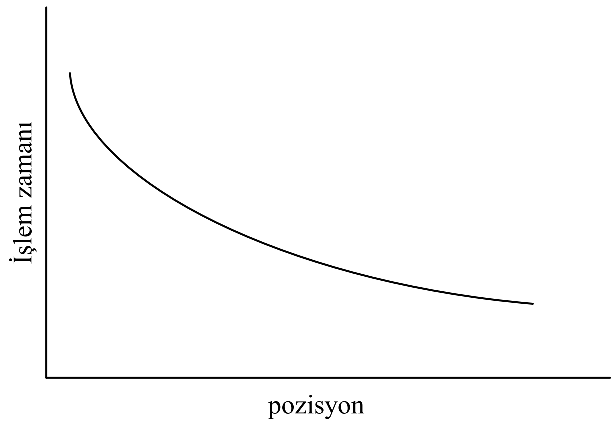
Key words: Scheduling, total flow time, mathematical programming, learning effect

1. GİRİŞ

Çizelgeleme problemleri, araştırmacıların en çok ilgilendiği alanlardan biridir. Son yıllarda bu ilgi artarak devam etmektedir. Çizelgeleme, imalat ve servis sistemlerinde çok önemli role sahip bir karar verme sürecidir. Bir firmada çizelgeleme fonksiyonu, matematiksel veya sezgisel teknikler kullanarak sınırlı kaynakların görevlere tahsis edilmesi işlemini gerçekleştirir. Kaynakların uygun olarak atanması ile firmanın amaç ve hedeflerini eniyilemesi sağlanır [1].

Üretim ortamlarında aynı işlemlerin devamlı olarak yapılması sonucunda işlem süreci gelişme gösterir. Gelişme gösteren bir iş, çizelgelemede ne kadar arkaya atılırsa, üretim zamanı o kadar kısalır. Bu olgu literatürde öğrenme etkisi olarak bilinir. Öğrenme etkisi, öğrenme eğrisi ile tanımlanır. Öğrenme eğrisi benzer işlerin yinelenmesiyle performans fonksiyonunun gelişim grafiğidir [2-3].

Başlangıçta n tane işin mevcut olduğu durumda, işler en kısa işlem zamanı kuralına göre sıralanırsa her iş normal bir işlem zamanına sahiptir. Bir işin normal işlem zamanı, ilk pozisyonda çizelgelendiğinde gerçekleşir ve takip eden işlerin işlem zamanları, öğrenme etkisinden dolayı normal işlem zamanlarından daha kısa zamanda gerçekleşir. Bir işlemi gerçekleştirmek için ihtiyaç duyulan zaman tekrar sayısına bağlı olarak Şekil 1'de görüldüğü gibi düşer [4-6].



Şekil 1. Oğrenme eğrisi

Bir j işi r. pozisyonda çizelgeleniyorsa bu işin işlem zamanı p_{jr} olarak kabul edilir. Bu taktirde,

$$p_{jr} = p_j r^a \qquad j, r = 1, \ldots, n \tag{1}$$

olur. Burada a öğrenme indeksidir ve öğrenme oranının 2 tabanına göre logaritması olarak tanımlanır. Herhangi bir r pozisyonunda yer alan j işinin öğrenme etkisi, bu işin işlem zamanına, öğrenme indeksine ve bu j işinden önce işlem gören işlerin sayısına bağlıdır [7].

Gerçekte bir çok farklı öğrenme eğrisi modelleri önerilmiş ve kullanılmıştır. Mosheiov ve Sidney [8], (1)'e göre daha genel olan bir model kullanmışlardır. Bu modelde p_{jr} r'nin azalan pozitif bir fonksiyonu olarak kabul edilmiştir. Araştırmacılar diğer birçok öğrenme modelini, bir işten diğerine öğrenme oranlarının farklı olmasının mümkün olabileceği durumla birleştirmişlerdir. Dikkat çeken örneklerden birisi (2)'de ifade edilen işe-bağımlı öğrenme etkisi faktörünün ilave edilmesi ile oluşan modeldir. Yani;

$$p_{jr} = p_j r^{a_j} \qquad j, r = 1, \ldots, n \tag{2}$$

dir. Aynı işlem serbest bırakılma zamanı olduğunda ise;

$$T_{jr} = T_j r^{a_j} \qquad j, r = 1, \ldots, n \tag{3}$$

olur. Burada T_{jr}; j işinin r. pozisyondaki serbest bırakma zamanını a_j ise, işe-bağımlı negatif bir parametreyi göstermektedir. İşe-bağımlı olduğu durumda serbest bırakma zamanı matrisi Tablo 1'de, işlem zamanları matrisi ise Tablo 2'de gösterilmiştir.

Tablo 1. Serbest bırakma zamanları matrisi

	$r=1$	$r=2$	$r=3$	...	$r=n$
T_1	T_1	$T_1 2^{a_2}$	$T_1 3^{a_3}$	...	$T_1 n^{a_n}$
T_2	T_2	$T_2 2^{a_2}$	$T_2 3^{a_3}$	...	$T_2 n^{a_n}$
...	...	...	...	...	...
T_n	T_n	$T_n 2^{a_2}$	$T_n 3^{a_3}$	...	$T_n n^{a_n}$

Öğrenme eğrisi, üretilen uçak sayısının artması sonucu üretilen uçağın direk işçilik maliyetinin azalmasıyla ilk defa Wright [9] tarafından tanımlanmıştır. Çizelgeleme problemlerinde ilk olarak öğrenme etkisini ise Biskup [7] ele almıştır. Biskup [7], tek makinalı çizelgeleme probleminde ortak teslim tarihinden sapmayı,

Tablo 2. İşlem zamanları matrisi

	$r=1$	$r=2$	$r=3$	...	$r=n$
p_1	p_1	$p_1 2^{a_2}$	$p_1 3^{a_3}$	...	$p_1 n^{a_n}$
p_2	p_2	$p_2 2^{a_2}$	$p_2 3^{a_3}$	...	$p_2 n^{a_n}$
...	...	...	...	...	...
p_n	p_n	$p_n 2^{a_2}$	$p_n 3^{a_3}$	...	$p_n n^{a_n}$

atama yöntemiyle $O(n^3)$ zamanda çözmüştür. Ayrıca tek makinada toplam tamamlanma zamanı probleminin en kısa işlem zamanı kuralı ile enküçüklendiğini göstermiştir. Mosheiov [2], tek makinada öğrenme etkisi dikkate alındığında maksimum tamamlanma zamanının en kısa işlem zamanı kuralı ile eniyilendiğini göstermiştir. Klasik tek makinalı problemlerde ağırlıklı toplam tamamlanma zamanını enküçükleme, ağırlıklı en kısa işlem zamanı ile; maksimum gecikmeyi enküçükleme, en erken teslim tarihi ile; ve geciken iş sayısı problemi, Moore algoritması [10] ile; eniyilenmesine rağmen öğrenme etkili olduğu durumda eniyi çözümü garanti etmediğini örneklerle gösterilmiştir. Çok ölçütlü çalışmalarda tek makinada teslim tarihi atama problemi ile toplam tamamlanma zamanı ve tamamlanma zamanının varyansının toplamını enküçükleme problemine uygulanmıştır. Paralel makinada ise toplam akış zamanını enküçükleme Mosheiov [11] tarafından atama problemiyle $O(n^4)$ zamanda çözülmüştür. Ayrıca Mosheiov ve Sidney [8], tek makinada maksimum tamamlanma zamanı ve toplam akış zamanını enküçükleme ile teslim tarihi atama problemini ve paralel makinada, toplam akış zamanını enküçükleme probleminde öğrenme eğrisinin işe-bağımlı olduğu durumu incelemişlerdir.

Bu çalışmada tek makinalı çizelgelemede, serbest bırakma ve işlem zamanlarının işe-bağımlı öğrenme etkili olması durumunda, toplam akış zamanı enküçüklemek için bir matematiksel model sunulmuştur. Önce akış zamanı ve önerilen model anlatılıp, çözümü bir örnekle gösterilecektir. Daha sonra modelin, test problemleri üzerindeki sonuçlarından bahsedilecektir. Son bölümde ise sonuçlar değerlendirilecektir.

2. TOPLAM AKIŞ ZAMANININ ENKÜÇÜKLENMESİ VE ÖNERİLEN MATEMATİKSEL MODEL

Toplam akış zamanının enküçükleme problemi, araştırmacıların en çok ilgilendiği problemlerden biridir. Çünkü toplam akış zamanının enküçüklenmesi ile sipariş çevrim hızı artar ve yeni siparişlerin daha erken alınması mümkün olur. Ayrıca yarı ürün stokların azaltılması sağlanır.

Tek makinalı n işli çizelgelemede öğrenme etkili toplam akış zamanının enküçüklenmesi problemi $n/1/ILE, r_j/\sum F$ olarak ifade edilmektedir. Burada ILE; işe-bağımlı öğrenme etkisini, r_j ; j işinin serbest bırakma zamanını, $\sum F$ ise toplam akış zamanını göstermektedir. Klasik durum için $n/1/r_j/\sum F$ problemi NP-zor problemdir[12].

2.1 Varsayımlar, notasyonlar ve tanımlar

Bu çalışmada kullanılan varsayımlar şöyledir:

1. Hazırlık zamanları biliniyor ve işlem zamanına dahil edilmiştir,
2. başlanan bir iş makinada bitirilmeden diğer iş başlayamaz,
3. makinaların çizelgeleme periyodunca bozulmadığı varsayılmaktadır,
4. bir makinada aynı anda tek iş yapılabilmektedir.

Model $n^2 + 2n$ değişkenli ve $5n$ kısıtlıdır.

j	iş sayısı	$j=1, 2, ..., n.$	
r^{a_j}	r. pozisyona bağlı j işinin işe–bağımlı öğrenme indeksi,	$j=1, 2, ..., n$	$r=1, 2, ..., n.$
p_j	j işinin işlem zamanı,	$j=1, 2, ..., n$	
T_j	j işinin serbest bırakılma zamanı,	$j=1, 2, ..., n$	
Z_{jr}	Eğer j işi r. pozisyonda işlem görmek için çizelgelenmişse 1, aksi halde 0,	$j=1, 2, ..., n;$	$r=1, 2, ..., n,$
A_r	r. pozisyondaki işin işe-bağımlı öğrenme etkili işlem zamanı		
$A_r = \sum_{j=1}^{n} r^{a_j} Z_{jr} p_j$		$r=1, 2, ..., n.$	
D_r	r. pozisyondaki işin işe-bağımlı öğrenme etkili serbest bırakılma zamanı		
$D_r = \sum_{j=1}^{n} r^{a_j} Z_{jr} T_j$		$j=1, 2, ..., n$	$r=1, 2, ..., n.$
S_r	r. pozisyondaki işin işe başlama zamanı	$r=1, 2, ..., n.$	
C_r	r. pozisyondaki işin tamamlanma zamanı	$r=1, 2, ..., n.$	
F_r	r. pozisyondaki işin akış zamanı	$r=1, 2, ..., n.$	
$F_r = C_r - D_r$		$r=1, 2, ..., n.$	

2.2. Karışık tamsayılı matematiksel programlama modeli

Tek makinada serbest bırakma ve işlem zamanlarının işe-bağımlı öğrenme etkili olduğu durumda toplam akış zamanını enküçüklemek için önerilen model aşağıda verilmiştir.

Amaç fonksiyonu:

$$Min\ Z = \sum_{r=1}^{n} F_r \tag{1}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{jr} = 1 \qquad r=1, 2, ..., n. \tag{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Z_{jr} = 1 \qquad j=1, 2, ..., n. \tag{3}$$

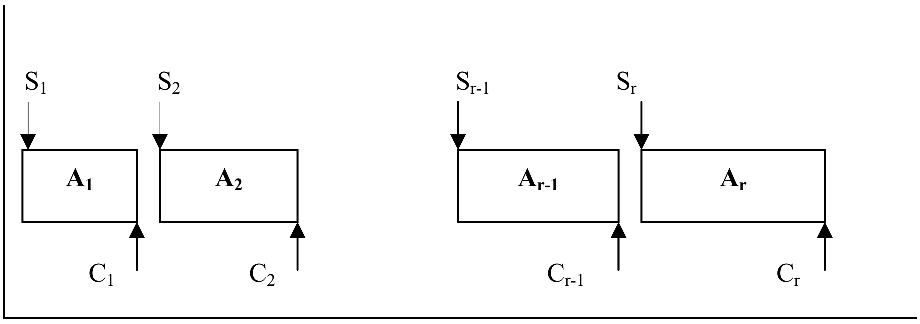
$$S_r \geq D_r \qquad r=2, 3, ..., n. \tag{4}$$

$$S_r \geq S_{r-1} + A_{r-1} \qquad r=2, 3, ..., n. \tag{5}$$

$$C_r = S_r + A_r\ ; \qquad r=1, 2, ..., n. \tag{6}$$

Kısıt (2); r. iş önceliğinde sadece bir tek iş çizelgelenmesini, kısıt (3); her bir iş sadece bir kez çizelgelenmesini ifade etmektedir. Kısıt (4); r. pozisyondaki işin işleme başlama zamanının r. sıradaki işin serbest bırakılma zamanından büyük veya eşit olma durumunu göstermektedir. Kısıt (5); r. sıradaki işin işlem başlama zamanı önceki işlerin bitiş zamanından büyük veya eşit olma durumunu göstermektedir. Kısıt (6); r.

pozisyondaki işin tamamlanma zamanının *r*. pozisyondaki işin başlangıç zamanı ile işlem zamanının toplamına eşit olduğunu ifade etmektedir. Atanan işlerin Gantt şeması Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2. Atanan işlerin Gantt şeması

Sayısal Örnek

Bu örnekte her iş için bir öğrenme eğrisi vardır. Böylece $p_{jr} = p_j r^{a_j}$, $a_j \leq 0$. İşlem zamanları üniform dağılıma göre [1,10] aralığında, serbest bırakılma zamanları ise [0,4] aralığında tamsayı olarak üretilmiştir. İşlem zamanları ve serbest bırakılma zamanlarının öğrenme indeksi ise, % 90 ($a_j = -0.152$) öğrenme eğrisi ile % 60 ($a_j = -0.737$) öğrenme eğrisi arasında düzgün olarak üretilmiştir. Problemde verilen veriler Tablo 3'de gösterilmiştir. Toplam akış zamanını enküçükleyen çizelge belirlenecektir.

Tablo 3. Problem için veriler

J	$p_j\ (a_j)$	$T_j\ (a_j)$
1	8 (-0.60)	3 (-0.20)
2	7 (-0.50)	1 (-0.30)
3	9 (-0.30)	2 (-0.40)
4	6 (-0.20)	4 (-0.50)
5	5 (-0.40)	1 (-0.30)
6	10 (-0.30)	2 (-0.60)

Çözüm:

Örnekteki işlem ve serbest bırakılma zamanları matrisi Tablo 4 ve Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 4. İşlem zamanları matrisi

$p_{jr} = p_j r^{a_J}$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$
$p_{1r} = p_1 r^{-0.6}$	$p_1 = 8$	$p_1 = 5.28$	$p_1 = 4.14$	$p_1 = 3.48$	$p_1 = 3.05$	$p_1 = 2.73$
$p_{2r} = p_1 r^{-0.5}$	$p_2 = 7$	$p_2 = 4.95$	$p_2 = 4.04$	$p_2 = 3.50$	$p_2 = 3.13$	$p_2 = 2.86$
$p_{3r} = p_1 r^{-0.3}$	$p_3 = 9$	$p_3 = 7.31$	$p_3 = 6.47$	$p_3 = 5.94$	$p_3 = 5.55$	$p_3 = 5.26$
$p_{4r} = p_1 r^{-0.2}$	$p_4 = 6$	$p_4 = 5.22$	$p_4 = 4.82$	$p_4 = 4.55$	$p_4 = 4.35$	$p_4 = 4.19$
$p_{5r} = p_1 r^{-0.4}$	$p_5 = 5$	$p_5 = 3.79$	$p_5 = 3.22$	$p_5 = 2.87$	$p_5 = 2.63$	$p_5 = 2.44$
$p_{6r} = p_1 r^{-0.3}$	$p_6 = 10$	$p_6 = 8.12$	$p_6 = 7.19$	$p_6 = 6.60$	$p_6 = 6.17$	$p_6 = 5.84$

Tablo 5. Serbest bırakılma zamanları matrisi

$T_{jr} = T_j r^{a_j}$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$
$T_{1r} = T_1 r^{-0.2}$	$T_1 = 3$	$T_1 = 2.61$	$T_1 = 2.41$	$T_1 = 2.27$	$T_1 = 2.17$	$T_1 = 2.10$
$T_{2r} = T_2 r^{-0.3}$	$T_2 = 1$	$T_2 = 0.81$	$T_2 = 0.72$	$T_2 = 0.66$	$T_2 = 0.62$	$T_2 = 0.58$
$T_{3r} = T_3 r^{-0.4}$	$T_3 = 2$	$T_3 = 1.52$	$T_3 = 1.29$	$T_3 = 1.15$	$T_3 = 1.05$	$T_3 = 0.98$
$T_{4r} = T_4 r^{-0.5}$	$T_4 = 4$	$T_4 = 2.83$	$T_4 = 2.31$	$T_4 = 2.00$	$T_4 = 1.79$	$T_4 = 1.63$
$T_{5r} = T_5 r^{-0.3}$	$T_5 = 1$	$T_5 = 0.81$	$T_5 = 0.72$	$T_5 = 0.66$	$T_5 = 0.62$	$T_5 = 0.58$
$T_{6r} = T_6 r^{-0.6}$	$T_6 = 2$	$T_6 = 1.32$	$T_6 = 1.03$	$T_6 = 0.87$	$T_6 = 0.76$	$T_6 = 0.68$

Problem çözüldüğünde eniyi sıra (5, 4, 2, 1, 3, 6) ve toplam akış zamanı değeri ise 97.09'dur.

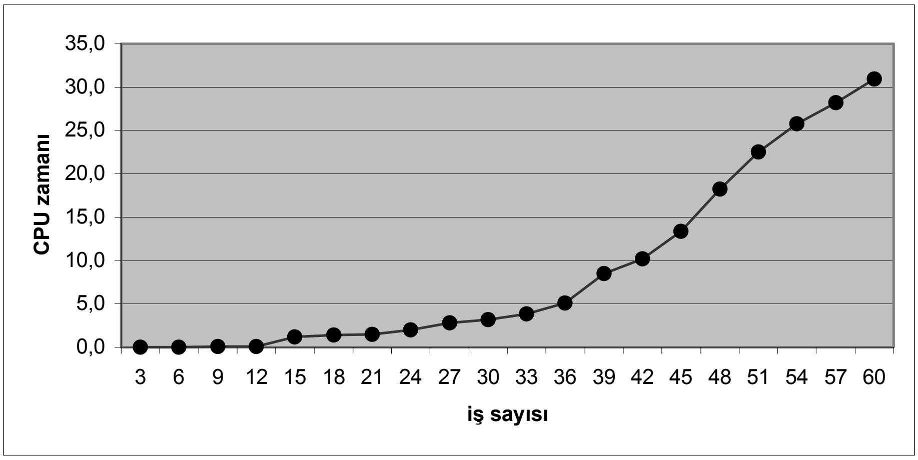
3. DENEYSEL SONUÇLAR

Problemleri çözmek için Hyper LINDO/PC 6.01 [13] kullanılmıştır. Bütün deneysel testler Pentium 4/2 GHz 512 MB RAM kapasiteli kişisel bilgisayarda yapılmıştır. İterasyon kısıtı 1000000 ile sınırlandırılmıştır. İşlem zamanları 1 ile 10 arasında serbest bırakılma zamanları ise 0 ile 4 arasında, işlem ve serbest bırakılma zamanlarının öğrenme indeksi ise, % 90 ($a_j = -0.152$) öğrenme eğrisi ile % 60 ($a_j = -0.737$) öğrenme eğrisi arasında düzgün olarak üretilmiştir. İş sayıları 3'ten başlamak üzere üçer üçer artırılarak 60'a kadar çözülmüştür. Her bir iş grubu için 10 test problemi olmak üzere toplam $10 \times 20 = 200$ problem çözülmüştür. Örnek problemlerin iş sayısına göre ortalama çözüm zamanları Tablo 6'da verilmiştir. bazı örnek problemler izin verilen iterasyon limiti içinde çözülememiştir. İş sayısı 3 ile 33 arasında bütün problemler çözülmüş 36 ile 48 problem 9'u, 51 ile 57 arasında 8' ve 60 işli probleminde 10 adetten 7 si çözülmüştür. Tabloda görüldüğü gibi iş sayısı arttıkça çözüm zamanı da uzamaktadır. Model 60 işe kadar problemi yaklaşık 31 saniyede çözmüştür. Bu sonuç problem için oldukça etkindir.

Modelin çözümünde ortalama CPU zamanlarına göre iş sayısı grafik olarak Şekil 3'de gösterilmiştir.

Tablo 6. Örnek problemlerin çözüm zamanları

n	Problem sayısı	Çözülen problem sayısı	Ortalama (CPU zamanı)
3	10	10	0.001670
6	10	10	0.011567
9	10	10	0.041900
12	10	10	0.079686
15	10	10	1.196617
18	10	10	1.374160
21	10	10	1.475700
24	10	10	1.989333
27	10	10	2.827863
30	10	10	3.174424
33	10	10	3.807922
36	10	9	5.123603
39	10	9	8.510089
42	10	9	10.184933
45	10	9	13.373643
48	10	9	18.252246
51	10	8	22.490556
54	10	8	25.761667
57	10	8	28.195000
60	10	7	30.959076



Şekil 3. İş sayısına göre ortalama CPU zamanları grafiği

4. SONUÇ

Bu çalışmada çizelgeleme için son yıllarda dikkate alınan işe-bağımlı öğrenme etkisiyle serbest bırakmalı toplam akış zamanını enküçüklemek için bir matematiksel model önerilmiştir. Model çözümleri Hyper LINDO/PC 6.01 kullanılarak iş sayısı 3 den başlamak üzere üçer üçer artırılarak 60 işe kadar toplam 20×10=200 adet problem çözülmüştür.

Daha büyük boyutlu problemlerin çözümünde matematiksel programlama yaklaşımı yeterli olmayacaktır. Bunun için bu problem tipleri için sezgisel yaklaşımlar geliştirilebilir.

Ayrıca öğrenme etkisini dikkate alan çok makinalı sistemlerde de uygulanabileceği düşünülmektedir.

5. KAYNAKLAR

1. Eren, T., ve Güner, E., "Tek ve Paralel Makinada Çok Ölçütlü Çizelgeleme Problemleri için Bir Literatür Taraması", **Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi,** Cilt 17, No: 4, s. 37-70, 2002.
2. Mosheiov, G., "Scheduling Problems with Learning Effect", **European Journal of Operational Research,** Volume 132, pp. 687-693, 2001.
3. Güner E., ve Eren T., "Öğrenme Etkisinin Tek ve Çok Ölçütlü Çizelgeleme problemlerine Uygulanması", **Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi,** (incelemede), 2002.
4. Nadler, G., and Smith, W. D., "Manufacturing Progress Functions for Types of Processes", **International Journal of Production Research,** Volume 2, pp. 115-135, 1963.
5. Yelle, L. E., "The Learning Curve: Historical Review and Comprehensive Survey", **Decision Science,** Volume 10, pp. 302-328, 1979.
6. Russel, R. S., and Taylor, B. W., **Operations Management** (3. ed.), Prentice Hall, New Jersey, ABD, 2000.
7. Biskup, D., "Single-Machine Scheduling with Learning Considerations", **European Journal of Operational Research,** Volume 115, pp. 173-178, 1999.
8. Mosheiov, G., and Sidney, J. B., "Scheduling with General Job-Dependent Learning Curves", **European Journal of Operational Research,** (in press), 2002.
9. Wright, T. P "Factors Affecting The Cost of Airplanes", **Journal of The Aeronautical Sciences,** Volume 3, pp. 122-128, 1936.
10. Moore, J. M., "An n Jobs, One Machine Sequencing Algorithm for Minimizing The Number of Late Jobs", **Management Science,** Volume 15, No: 1, pp. 102-109, 1968.
11. Mosheiov, G., "Parallel Machine Scheduling with Learning Effect", **Journal of The Operational Research Society,** Volume 52, pp. 1165-1169, 2001.
12. Brucker, P., Lenstra J.K., and Rinnooy Kan A.H.G., "Complexity of Machine Scheduling Problems", **Annals of Discrete Mathematics,** Volume1, pp. 343–362, 1977.
13. Lindo Systems, Inc, **Hyper LINDO/PC Release 6.01,** Chicago, USA, 1997.